

Определение корреляций между внешними характеристиками полиномиального идеала и вычислительной сложностью нахождения его базиса Грёбнера

Москва, МГУ, «Программирование и вычислительная
математика»

Салпагаров С.И. и Мамонов Антон

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы кафедра
Математического моделирования и искусственного интеллекта

3 Декабря, 2025

Введение

Изучение задач механики и математической физики часто сводится к решению систем полиномиальных уравнений. Эта задача не имеет универсального численного метода решения в случаях с двумя и более неизвестными.

Нахождение базиса Грёбнера сводит решение системы нелинейных уравнений к решению одного уравнения с одним неизвестным*. Алгоритм Бухбергера позволяет найти базис Грёбнера за конечное число шагов, но на практике его можно использовать для решения систем лишь небольшой степени сложности.

*: D. Cox, J. Little, and D. O'Shea, // *Ideals, varieties, and algorithms*. Springer, 3 edition, 2007

Вычислительная сложность

Пусть $F[x_1, \dots, x_n]$ - кольцо полиномов с коэффициентами в поле F , и пусть K - подмножество этого кольца, такое, что d - максимальная суммарная степень любого полинома в K . Тогда для любого допустимого упорядочения общая степень полиномов в базисе Грёбнера для идеала, порожденного K , ограничена $2((d^2/2) + d)^{2^{n-1}}$, где n - число переменных (литеров), и d - максимальная суммарная степень полиномов. С использованием линейной алгебры над векторным пространством полиномов, ограниченной максимальной степенью d , что в результате даёт итоговую оценку сложности $d^{2^{n+o(1)}}$

*: Thomas W. Dubé // *IThe Structure of Polynomial Ideals and Gröbner Bases*, SIAM Journal on Computing, 1990, 19:4, 750-773, DOI 10.1137/0219053

Выдвигаемые гипотезы

- ➊ Для различных классов задач более эффективно использовать различные мономиальные порядки. Таковые классы задач в дальнейшем будем называть *Классы по мономиальному порядку*.
- ➋ Для различных классов задач более эффективно использовать различные виды мономиального деления. Как следствие, вычисления с использованием различных алгоритмов будут выполняться с разной скоростью. Таковые классы задач в дальнейшем будем называть *Классы по мономиальному делению*.
- ➌ Рассмотрим варианты *перестановок переменных* для задачи – такие замены имён переменных, которые изменяют их лексикографический порядок. Существуют такие несимметричные перестановки переменных, которые оказывают значимое влияние на скорость решения задачи.

Следует пояснить, что предполагается не наличие одного наилучшего варианта мономиального порядка или мономиального деления, показывающего наилучшее время при применении ко всем тестам, а напротив – ситуация, в которой для некоторых задач предпочтительно использовать один вариант, а для других – другой.

Также следует указать, что правдивость указанных гипотез является, можно сказать, общеизвестной. Тем не менее, важно отметить, что нет отдельных оценок эффективности того или иного выбора мономиального порядка или деления в контексте разных классов задач, как нет и предлагаемых способов классификации задач для определения наиболее эффективного алгоритма решения.

Оборудование

1 Сервер:

Два процессора Intel Xeon L5630, суммарно 8 ядер и 16 логических процессоров. Базовая тактовая частота каждого ядра – 2134 МГц.

Оперативная память: для вычисления на серверной платформе было выделено 100 Гб оперативной памяти.

2 Персональный компьютер:

Процессор: Intel Core i3-10105F, с частотой 3.70 ГГц, с 4 ядрами и 8 логическими процессорами соответственно.

Оперативная память: 32 Гб, со скоростью обращения 2667 МГц. Во время проведения экспериментов, было гарантированно доступно не менее 20 Гб.

Программное обеспечение

- 1 Система GInv, для вычисления инволютивных базисов (сводимых к базису Грёбнера), разработанная Блинковым Ю.А.
<https://github.com/blinkovua/GInv>
Доработанная и оформленная в виде библиотеки
открытого кода (*pip install ginvdist*)
<https://github.com/TheMumblingMammoth/GInvDist>
- 2 Система компьютерной алгебры Sage, развернутая на сервере.
- 3 Система компьютерной алгебры Reduce.

Набор тестов

Основной набор тестов состоит из 135 тестовых файлов. В список тестов включены вариации известных задач, таких как: система Роуза, модель общего экономического равновесия; обобщенная задача о собственных значениях; система Лоренца, и другие. Эти тесты включают в себя задачи по алгебраическим системам из теории кодирования, химической кинетики и робототехники. Тесты хранятся в файлах формата JSON.

Внутри JSON файлов хранится следующая информация: обязательно – размерность системы уравнений, список многочленов, список переменных; дополнительно – текстовое описание задачи. Пример тестовых файлов приведен ниже.

Пример теста: reimer4

```
"variables": ["x1", "x2", "x3", "x4" ],  
"equations": [  
    "2 * x12 - 2 * x22 + 2 * x32 - 2 * x42 - 1",  
    "2 * x13 - 2 * x23 + 2 * x33 - 2 * x43 - 1",  
    "2 * x14 - 2 * x24 + 2 * x34 - 2 * x44 - 1",  
    "2 * x15 - 2 * x25 + 2 * x35 - 2 * x45 - 1"  
],  
"dimension": 4
```

Пример теста: reimer7

```
"variables": ["x1", "x2", "x3", "x4", "x5", "x6", "x7"],  
"equations": [  
    "2*x12 - 2*x22 + 2*x32 - 2*x42 + 2*x52 - 2*x62 + 2*x72 - 1",  
    "2*x13 - 2*x23 + 2*x33 - 2*x43 + 2*x53 - 2*x63 + 2*x73 - 1",  
    "2*x14 - 2*x24 + 2*x34 - 2*x44 + 2*x54 - 2*x64 + 2*x74 - 1",  
    "2*x15 - 2*x25 + 2*x35 - 2*x45 + 2*x55 - 2*x65 + 2*x75 - 1",  
    "2*x16 - 2*x26 + 2*x36 - 2*x46 + 2*x56 - 2*x66 + 2*x76 - 1",  
    "2*x17 - 2*x27 + 2*x37 - 2*x47 + 2*x57 - 2*x67 + 2*x77 - 1",  
    "2*x18 - 2*x28 + 2*x38 - 2*x48 + 2*x58 - 2*x68 + 2*x78 - 1"  
"dimension": 7
```

Пример теста: hcyclic6

```
"variables": ["x1", "x2", "x3", "x4", "x5", "x6", "w"],  
"equations": [  
    "x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6",  
    "x1 * x2 + x1 * x6 + x2 * x3 + x3 * x4 + x4 * x5 + x5 * x6",  
    "x1 * x2 * x3 + x1 * x2 * x6 + x1 * x5 * x6 + x2 * x3 * x4 + x3 *  
        x4 * x5 + x4 * x5 * x6",  
    "x1 * x2 * x3 * x4 + x1 * x2 * x3 * x6 + x1 * x2 * x5 * x6 + x1 *  
        x4 * x5 * x6 + x2 * x3 * x4 * x5 + x3 * x4 * x5 * x6",  
    "x1 * x2 * x3 * x4 * x5 + x1 * x2 * x3 * x4 * x6 + x1 * x2 * x3 * x5 * x6 +  
        x1 * x2 * x4 * x5 * x6 + x1 * x3 * x4 * x5 * x6 + x2 * x3 * x4 * x5 * x6",  
    "-w6 + x1 * x2 * x3 * x4 * x5 * x6"  
],  
"description": ... ,  
"dimension": 7
```

Итоги вычислений

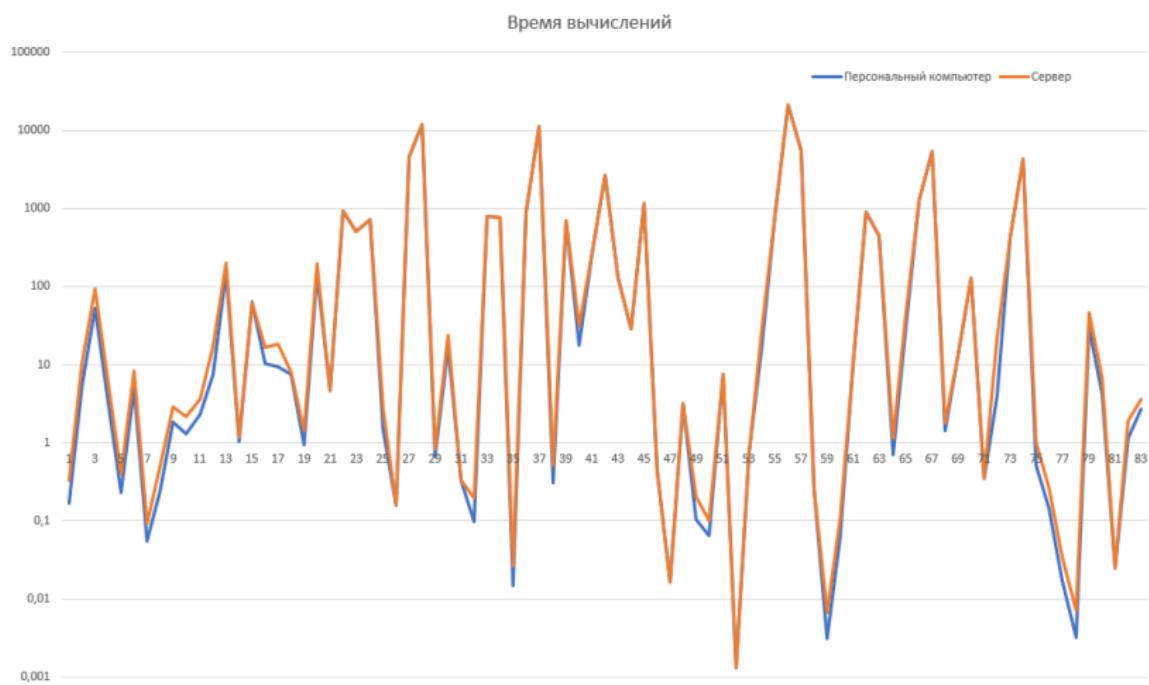
Общее время успешно проведенных вычислений среди всех платформ – 270134, секунд, что соответствует 75 дням непрерывных вычислений. При этом значительное количество времени было потрачено на вычисления, не увенчавшиеся успехом.

Так, например, рассмотрим тест `reimer8`. Его вычисление было возможно проводить только на **Сервере**. На 42 день (более 3 628 800 секунд) расчетов было принято решение прервать работу над тестом. К этому моменту вычисления заняли в памяти чуть более 80 из 100 доступных Гб.

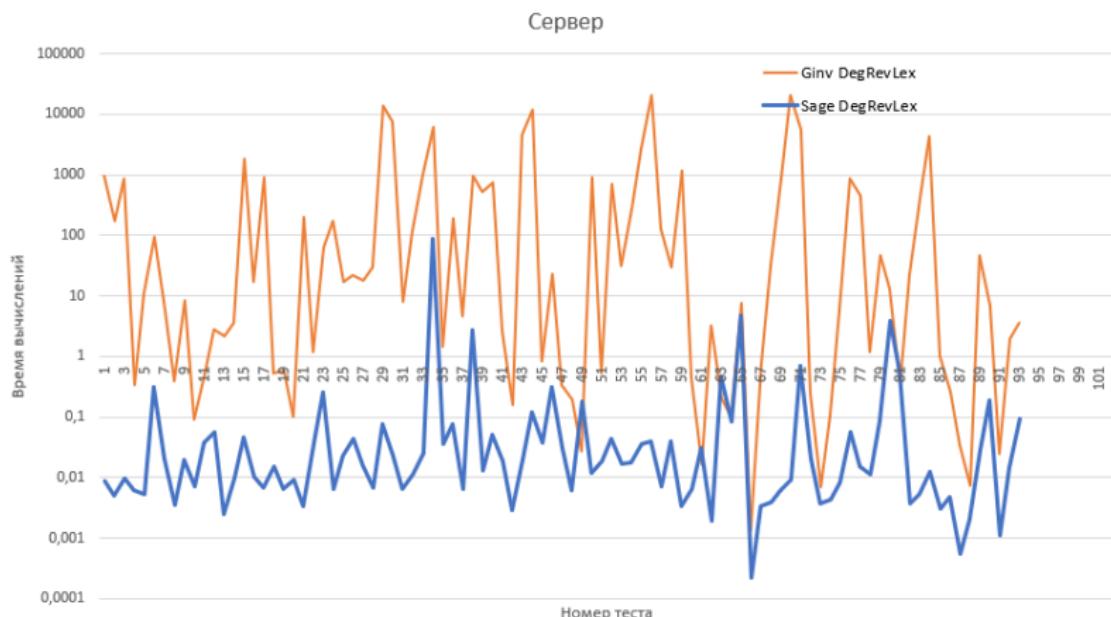
С целью экономии времени было принято прерывать вычисления длительностью более двух часов.

Из примеров: `hcyclic6` - 23,56 секунд, `reimer4` - 22,44 секунд, `reimer7` - >2 часов.

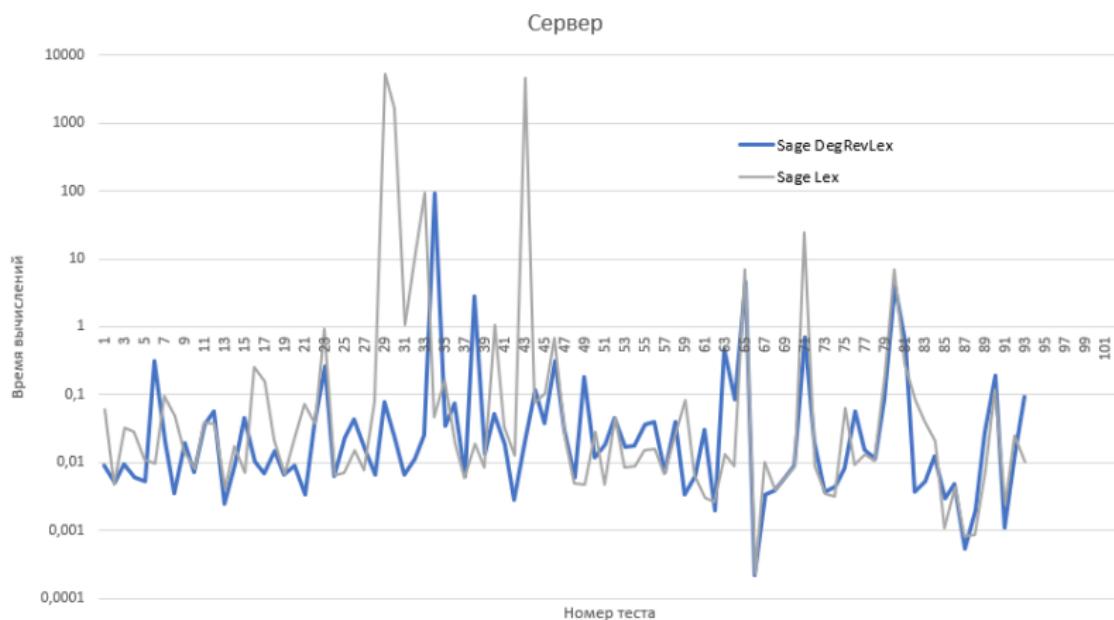
Проверка устойчивости



Сравнение делений



Сравнение порядков



Набор характеристик

Выделим возможный набор внешних характеристик:
размерность идеала; средний коэффициент; максимальный
коэффициент; сумма коэффициентов; средняя степень по
моному; средняя степень по переменной; максимальная
степень; сумма степеней; количество мономов; количество
полиномов; количество литеров; среднее количество мономов
на полином; среднее количество переменных в мономе;
максимальное количество переменных в мономе; сумма
степеней НОК - наименьшего общего кратного; сумма остатков
от НОК (по всем мономам); сумма остатков от НОК (по всем
мономам); сумма остатков от НОК (по старшим мономам).

Пример:

Сумма остатков от НОК (по всем мономам) = Кол. мономов *
Сумма степеней НОК - 'Сумма степеней'

Классификация по времени |

| Имя | Решение | Время | Раз-ть | Сумма степеней | Кол-во мономов |
|---------|-------------|--------|--------|----------------|----------------|
| assur44 | есть | 940,24 | 8 | 201 | 103 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| vermeer | есть | 3,58 | 5 | 37 | 17 |
| Корр-ия | Время | 1,00 | 0,18 | 0,21 | 0,17 |
| ... | Память | 0,35 | 0,18 | 0,21 | 0,16 |
| ... | Класс <3000 | 0,84 | 0,27 | 0,26 | 0,19 |
| ... | Класс <300 | 0,54 | 0,39 | 0,42 | 0,43 |

Классификация по времени II

| Имя | Кол-во полиномов | Кол-во литеров | Макс. кол-во литеров в мономе |
|-------------|------------------|----------------|-------------------------------|
| assur44 | 8 | 193 | 3 |
| ... | ... | ... | ... |
| vermeer | 4 | 25 | 3 |
| Время | 0,14 | 0,15 | 0,00 |
| Память | 0,15 | 0,16 | -0,10 |
| Класс <3000 | 0,17 | 0,15 | 0,01 |
| Класс <300 | 0,38 | 0,40 | 0,04 |

Классификация по времени II

| Имя | Сумма степеней НОК | Сумма остатков от НОК (по всем мономам) | Сумма остатков от НОК (по старшим мономам) |
|-------------|--------------------|---|--|
| assur44 | 16 | 1447 | 120 |
| ... | ... | ... | ... |
| vermeer | 11 | 150 | 33 |
| Время | 0,22 | 0,17 | 0,15 |
| Память | 0,21 | 0,21 | 0,21 |
| Класс <3000 | 0,30 | 0,25 | 0,21 |
| Класс <300 | 0,32 | 0,39 | 0,35 |

Классификация по наличию решения |

| Имя | Решение | Время | Раз-ть | Средняя степень по моно-му | Сумма степеней |
|---------|---------|--------|--------|----------------------------|----------------|
| assur44 | есть | 940,24 | 8 | 1,94 | 201 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| vermeer | есть | 3,58 | 5 | 2,12 | 37 |
| Корр-ия | Время | 1,00 | 0,18 | 0,05 | 0,21 |
| ... | Память | 0,35 | 0,18 | 0,08 | 0,21 |
| ... | Класс | 0,75 | 0,016 | 0,31 | 0,30 |

Классификация по наличию решения II

| Имя | Кол-во мономов | Кол-во полиномов | Кол-во литеров |
|---------|----------------|------------------|----------------|
| assur44 | 103 | 8 | 193 |
| ... | ... | ... | ... |
| vermeer | 17 | 4 | 25 |
| Время | 0,17 | 0,14 | 0,15 |
| Память | 0,16 | 0,15 | 0,16 |
| Класс | 0,34 | 0,23 | 0,35 |

Классификация по наличию решения III

| Имя | Среднее мономов на полином | Среднее кол-во литеров в мономе | Максимальное кол-во литеров в мономе |
|---------|----------------------------|---------------------------------|--------------------------------------|
| assur44 | 12,88 | 1.87 | 3 |
| ... | ... | ... | ... |
| vermeer | 4.25 | 1.47 | 3 |
| Время | 0,07 | 0,10 | 0,00 |
| Память | 0,08 | -0,06 | -0,09 |
| Класс | 0,35 | 0,49 | 0,42 |

Классификация по наличию решения IV

| Имя | Сумма степеней НОК | Сумма остатков от НОК (по всем мономам) | Сумма остатков от НОК (по старшим мономам) |
|---------|--------------------|---|--|
| assur44 | 16 | 1447 | 120 |
| ... | ... | ... | ... |
| vermeer | 11 | 150 | 33 |
| Время | 0,22 | 0,17 | 0,15 |
| Память | 0,21 | 0,21 | 0,21 |
| Класс | 0,28 | 0,33 | 0,18 |

Перестановки DegLex

| Имя | Время | Редуций |
|---------|-------|---------|
| cyclic6 | 51,03 | 6414493 |
| cyclic6 | 41,62 | 5583844 |
| cyclic6 | 35,40 | 5913924 |
| cyclic6 | 41,85 | 5673883 |
| cyclic6 | 47,90 | 5835013 |
| cyclic6 | 29,99 | 5503222 |
| reimer4 | 11,06 | 64313 |
| reimer4 | 12,10 | 67317 |
| reimer4 | 4,22 | 51198 |
| reimer4 | 4,24 | 51196 |

Перестановки Lex

| Имя | Время |
|----------|--------|
| cassou | 0,0118 |
| cassou | 0,0025 |
| chandra4 | 0,0086 |
| chandra4 | 0,0080 |
| chandra4 | 0,0169 |
| chandra4 | 0,0067 |

The End



© 2025, Mamonov Anton et al. Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

 W. H. Press et al., *Numerical recipes in C : the art of scientific computing*. 2nd edition, ISBN 0-521-43108-5, 1992.

 D. Cox, J. Little, and D. O'Shea, *Ideals, varieties, and algorithms*. Springer, 3 edition, 2007

 A. Yu. Zharkov and Yu. A. Blinkov, *Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille*. France, 1993

 Yu. A. Blinkov, V. P. Gerdt, *Programming*. 2008.

 Yu. A. Blinkov, URL:<https://github.com/blinkovua/GInv>.

 Bayramov R. E. et al, *Analytical study of cubature formulas on a sphere in computer algebra systems*. Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2023; 63(1): 93-101. DOI: 10.31857/S0044466923010052.

 Yu. A. Blinkov, A. A. Mamonov, URL:https://github.com/MamonovAnton/ginv_testing.