

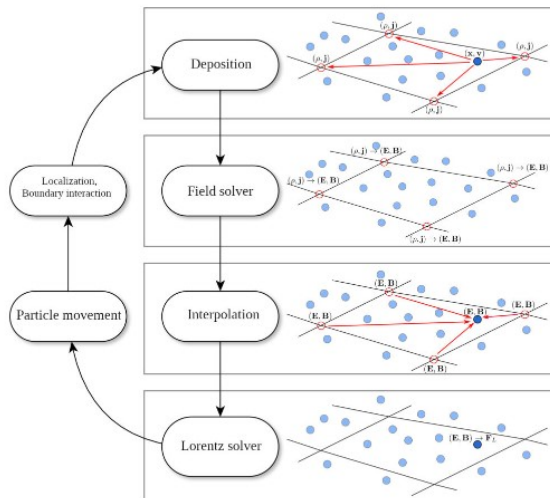
О PIC-методе и решениях с исчезающей гладкостью

Е.В.Чижонков

МГУ им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет

Конференция «Программирование и вычислительная математика»,
посвященная 100-летию со дня рождения Н.П. Трифонова

РIS-метод – общая схема



Динамика частиц в PIC-методе

В безразмерной форме релятивистская динамика движущихся частиц, т.е их импульсы, скорости и координаты, описывается уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = V_i, \quad \frac{dP_i}{dt} = -E(x_i, t), \quad V_i = \frac{P_i}{\sqrt{1 + P_i^2}}, \quad 1 \leq i \leq M_p.$$

При этом сила $E(x_i, t)$, действующая на частицу, определяется с помощью интерполяционной процедуры для функции $E(x, t)$, заданной в центрах ячеек c_k , $1 \leq k \leq M_g$. В свою очередь, значения $E(c_k, t)$ вычисляются с помощью потенциала $\varphi(x, t)$, удовлетворяющего уравнению :

$$-\frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} = 1 - N(x, t), \quad E(x, t) = -\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x}.$$

Таким образом, PIC-метод (метод частиц в ячейке) — это комбинация лагранжевой процедуры для динамики частиц и эйлеровой процедуры типа обычного метода сеток для потенциала электрического поля.

Сборка заряда в PIC-методе

Наибольший интерес представляет процедура „сборка заряда“ (**particle deposition**), когда в момент времени t по известным координатам частиц x_i , $1 \leq i \leq M_p$, вычисляется плотность $N(x, t)$ в центрах ячеек c_k , $1 \leq k \leq M_g$.

Если задана интерполяционная функция $W(x)$, определяющая конкретный способ сборки заряда, то в центрах ячеек c_k плотность заряда определяется формулой

$$N(c_k, t) = \frac{1}{h_g} \sum_{i=1}^{M_p} q_i W(c_k - x_i),$$

где частицы с координатами x_i имеют заряды q_i .

Область покрыта равномерной сеткой из центров ячеек размера h_g , заряд каждой частицы равен $q_i = h_g/l$, l — параметр. При целом l это число можно считать количеством частиц в ячейке.

Метод CIC

$$W_{CIC}(x) = \begin{cases} 1 - |x|/h_g, & \text{при } |x| \leq h_g, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Погрешность метода CIC при $h_g \ll 1$

$$ERR_{CIC} = \max_{c_k, t} |\hat{N}(c_k, t) - N_{CIC}(c_k, t)| \leq \frac{1}{4I^2 N_{\min}} \equiv O(I^{-2}).$$

Метод TSC

$$W_{TSC}(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} - \left(\frac{x}{h_g}\right)^2, & \text{при } |x| \leq h_g/2, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{|x|}{h_g}\right)^2, & \text{при } h_g/2 \leq |x| \leq 3h_g/2, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

Погрешность метода TSC при $h_g \ll 1$

$$ERR_{TSC} = \max_{c_k, t} |\hat{N}(c_k, t) - N_{TSC}(c_k, t)| \leq \frac{1}{12l^3 N_{\min}^2} \equiv O(l^{-3}).$$

Коррекция потенциала и силы — TSC

Пусть частица с зарядом 1 находится в точке $c_k = 0$, а шаг сетки для простоты $h_g = 1$, тогда заряд этой частицы распределится по сетке

$$N(0) = \frac{3}{4}, \quad N(\pm 1) = \frac{1}{8}.$$

Это — известный эффект «расплывания» заряда.

С целью коррекции потенциала (после решения уравнения Пуассона) необходимо решить вспомогательную систему уравнений

$$\frac{\varphi_{k-1}^* + 6\varphi_k^* + \varphi_{k+1}^*}{8} = \varphi_k, \quad 1 \leq k \leq M_g - 1, \quad \varphi_0^* = \varphi_{M_g}^*.$$

Аналогичная процедура проводится при вычислении силы $E(x_i)$, действующей на каждую частицу, так как там также используется интерполяционная функция $W_{TSC}(x)$.

Другие погрешности - сравнение ($\tau = O(h_g)$)

	метод <i>CIC</i>	метод <i>TSC</i>
x_i, V_i, P_i	$O(\tau^2)$	$O(\tau^4)$
φ	$O(h_g^2)$	$O(h_g^4)$
E	$O(h_g^2)$	$O(h_g^4).$

Вычислительные затраты и сложность реализации метода TSC существенно превышают аналогичные параметры метода CIC, поэтому в многомерных расчетах метод TSC практически не используется.

Гидродинамическая постановка — уравнения

Уравнения релятивистских ленгмюровских колебаний в холодной плазме:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial x} + E = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial t} + V \frac{\partial E}{\partial x} - V = 0, \quad \gamma = \sqrt{1 + P^2}, \quad V = \frac{P}{\gamma} \quad (1)$$

где P , V — импульс и скорость электронов, γ — фактор Лоренца, E — электрическое поле, x и t — безразмерные координаты по пространству и времени соответственно. К системе (1) обычно добавляют уравнение

$$N(x, t) = 1 - \frac{\partial E(x, t)}{\partial x}, \quad (2)$$

характеризующее безразмерную плотность электронов.

Эталонная задача — начальные данные

Нас будет интересовать в полуплоскости $\{(x, t) : x \in \mathbb{R}, t > 0\}$ решение задачи Коши для (1) с начальными условиями

$$P(x, 0) = P_0(x), \quad E(x, 0) = E_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

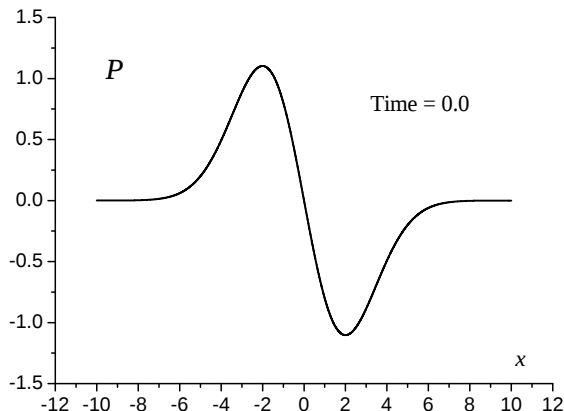
Выберем начальные условия (3) следующего вида:

$$P_0(x) = -\beta x \exp\left\{-2\frac{x^2}{\rho_*^2}\right\}, \quad E_0(x) = 0. \quad (4)$$

Подобные возмущения могут возникать в разреженной плазме при распространении короткого мощного лазерного импульса, тогда величины β и ρ_* определяются длительностью, амплитудой и шириной импульса.

Эталонная задача — частный случай

Пространственное распределение функции импульса P в начальный момент времени. Частный случай: встречное движение частиц.



Эталонная задача – свойства

Из системы характеристик для уравнений (1) следует

$$2\gamma(x_0, t) + E^2(x_0, t) = 2\gamma(x_0, 0) + E^2(x_0, 0) = C_1(x_0) \geq 2 \quad (5)$$

вдоль характеристики, стартующей из точки x_0 , поэтому само решение остается всегда ограниченным.

Свойства решения существенно зависят от выполнения для начальных данных условия

$$C_1(x_0) \neq \text{const.} \quad (6)$$

Рассмотрим вопрос о локальном существовании решения во времени (см. ссылки ниже).

Розанова О.С., Чижонков Е.В. О существовании глобального решения одной гиперболической задачи // Доклады Академии наук. 2020.

Rozanova O.S., Chizhonkov E.V. On the conditions for the breaking of oscillations in a cold plasma // ZAMP. 2021.

Эталонная задача – свойства

Теорема 1. Пусть начальные данные (3) принадлежат классу $C^2(\mathbb{R})$ и (6) выполнено. Тогда если существует хотя бы одна точка x_0 , для которой выполняется неравенство

$$K_- (P'_0(x_0))^2 + 2 E'_0(x_0) - 1 \geq 0, \quad K_- = 8/C_1^3(x_0),$$

то производные решения задачи (1), (3) в течение конечного времени, не превышающего период колебания $T(x_0) \geq 2\pi$, обращаются в бесконечность.

Выполнение для всех x условия

$$(P'_0(x))^2 + 2 E'_0(x) - 1 < 0 \tag{7}$$

обеспечивает сохранение гладкости решения по крайней мере в течение четверти периода $T(x)/4$ на каждой характеристике, то есть до момента времени $t_* = \min_{x \in \mathbb{R}} T(x)/4$, $t_* \geq \pi/2$.

Кроме того, имеет место результат о несуществовании глобального во времени решения, а именно: справедлива

Теорема 2. *При выполнении условия (6) у любого решения задачи Коши (1), (3), являющегося сколь угодно малым гладким отклонением от положения равновесия $P = E = 0$, производные решения в течение конечного времени обращаются в бесконечность.*

Если условие (6) не выполнено, в терминах начальных данных может быть получен критерий образования особенностей за конечное время и существуют решения типа бегущей с постоянной скоростью волны. Такие решения могут быть сколь угодно малыми отклонениями от положения равновесия.

Эталонное решение – продолженная система

Дополним имеющуюся постановку (1), (3) для функций $P(x, t)$ и $E(x, t)$ задачей для их производных:

$$Q(x, t) = \frac{\partial P(x, t)}{\partial x}, \quad D(x, t) = \frac{\partial E(x, t)}{\partial x}.$$

Продифференцируем по x уравнения (1), получим

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + V \frac{\partial Q}{\partial x} = -D - \frac{Q^2}{(1 + P^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial D}{\partial t} + V \frac{\partial D}{\partial x} = (1 - D) \frac{Q}{(1 + P^2)^{3/2}}. \quad (8)$$

Начальные данные для функций Q и D определяются из (3):

$$Q(x, t = 0) = P'_0(x), \quad D(x, t = 0) = E'_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Эталонное решение – численный алгоритм

В лагранжевых переменных траектория каждой частицы характеризуется двумя параметрами: лагранжевой координатой y и функцией смещения $R(y, t)$, которые совместно определяют эйлерову координату $x(y, t)$, т.е. местонахождение частицы в момент времени t ,

$$x(y, t) = y + R(y, t).$$

Системы уравнений (1) и (8), переписанные в лагранжевых переменных, распадаются на независимые блоки (по четыре ОДУ в каждом), если использовать связь между функцией смещения R и электрическим полем E в плоском одномерном случае (см. ссылку)

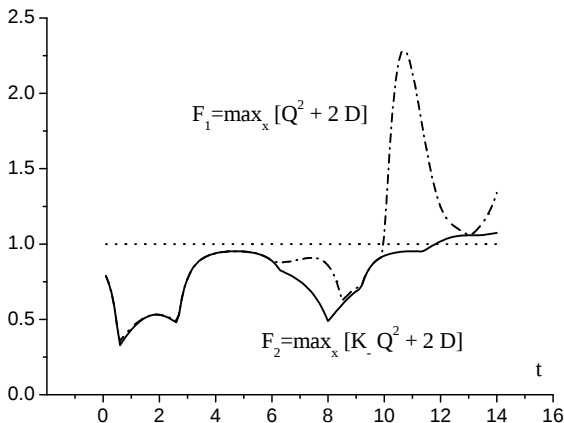
$$R(y, t) = E(x, t) \equiv E(y + R(y, t), t).$$

Розанова О.С., Чижонков Е.В. Об аналитическом и численном решении одномерных уравнений холодной плазмы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021.

Иллюстрация к Теореме 1

F_1 — достаточное условие для градиентной катастрофы (пунктирная линия), F_2 — достаточное условие для гладкости (сплошная линия).

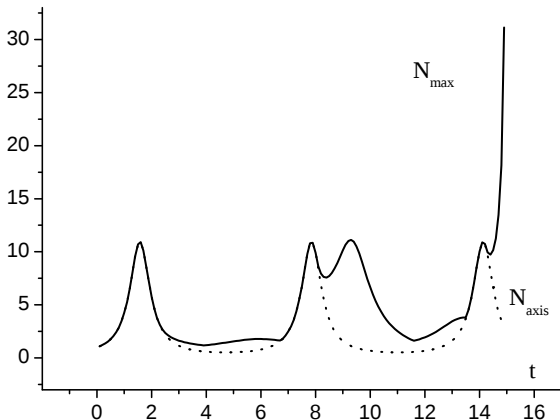
Параметры: $\rho_* = 4$, $\beta = 0.908761$.



Динамика электронной плотности

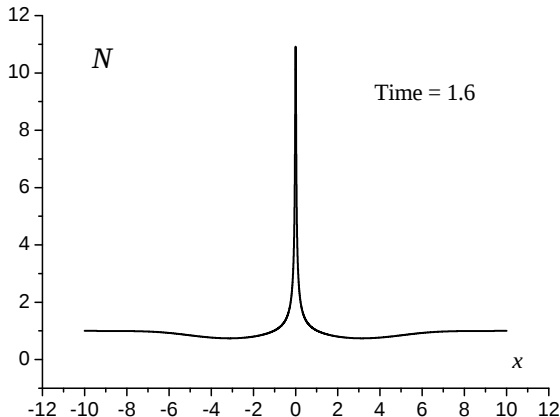
Максимальное по области значение N_{max} (сплошная линия), значение на оси симметрии области N_{axis} (пунктирная линия).

Параметры: $\rho_* = 4$, $\beta = 0.908761$.



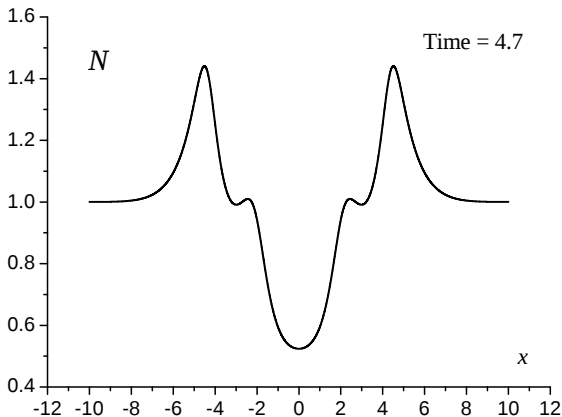
Плотность — первый осевой максимум

Пространственное распределение функции плотности электронов N в момент времени $t = 1.6$. Электроны приблизились к оси $x = 0$.



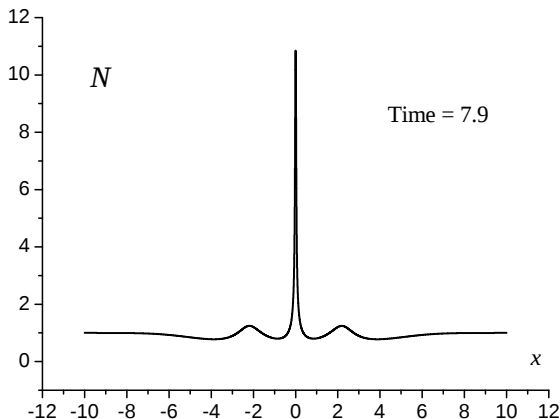
Плотность — первый осевой минимум

Пространственное распределение функции плотности электронов N в момент времени $t = 4.7$. Электроны удалились от оси $x = 0$.



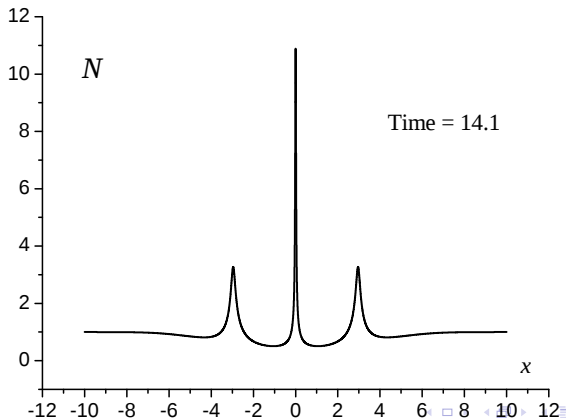
Плотность — второй осевой максимум

Пространственное распределение функции плотности электронов N в момент времени $t = 7.9$. Электроны приблизились к оси $x = 0$.



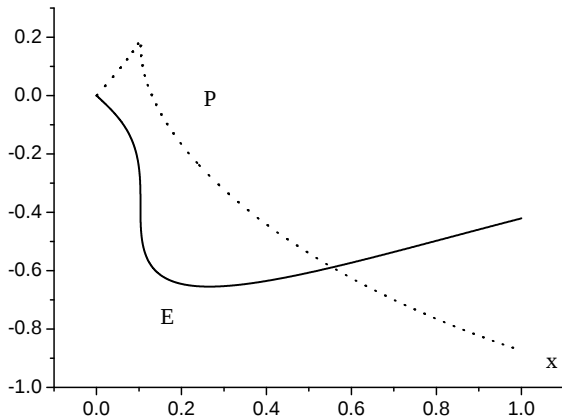
Плотность — третий осевой максимум

Пространственное распределение функции плотности электронов N в момент времени $t = 14.1$. Накануне произошло пересечение траекторий частиц в методе CIC: $t_{err} = 13.510222\dots$, $x_{err} = \pm 0.3 \cdot 10^{-7}$.
Ошибка в методе CIC !!!



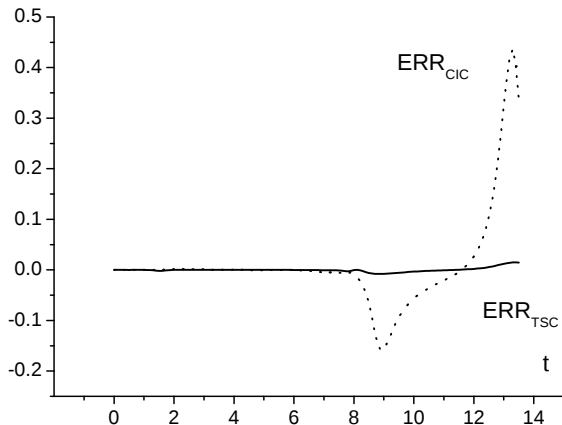
Эффект опрокидывания колебаний: $x_{br} = \pm 0.10329...$

Пространственные распределения функций электрического поля E (сплошная линия) и импульса P (пунктирная линия) в момент опрокидывания $t_{br} = 15.0222...$ Подобласть $x \geq 0$.



Погрешности плотности CIC и TSC при $x = 0$

Динамика погрешности электронной плотности при $x = 0$: для варианта CIC — ERR_{CIC} (штрих-пунктирная линия), для варианта TSC — ERR_{TSC} (сплошная линия).



Трансляция ошибок и ложное пересечение траекторий

Для достаточно малых размеров сетки $h_g \ll 1$ и при среднем количестве l частиц в ячейке можно оценить момент времени **ложного** пересечения траекторий частиц в окрестности осевого максимума электронной плотности.

$$ERR(N) \rightarrow ERR(\varphi) \rightarrow ERR(E) \rightarrow ERR(x) \rightarrow ERR(N)$$

$$t_{krit,CIC} \approx 2\sqrt{l} \approx 9, \quad \text{при } l = 20, \quad \tau = h_g = 0.4 \cdot 10^{-3}.$$

$$t_{krit,TSC} \approx l\sqrt{12 N_{min}} \approx 40, \quad \text{при } l = 16, \quad \tau = h_g = 10^{-3}.$$

ВЫВОДЫ:

- стандартное тестирование на гладких решениях может оказаться недостаточным для правильных выводов из численных экспериментов;
- за простоту, наглядность и физическую естественность PIC-метода приходится расплачиваться большими вычислительными затратами при невысокой точности;
- большие вычислительные затраты метода TSC позволяют моделировать эффект опрокидывания релятивистских колебаний на небольшом временном интервале; на основе наиболее популярного метода CIC это проделать пока не удалось;
- математической теории, лежащей в основе метода PIC, есть куда развиваться.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!