МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Александр Михайлович Денисов

кафедра математической физики

факультет ВМК МГУ

Рассмотрим начально-краевую задачу для сингулярно возмущенного уравнения теплопроводности

$$\varepsilon u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$u_x(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi, \tag{4}$$

где ε - малый параметр, $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < \pi, 0 < t \le T\}$.

Чтобы подчеркнуть зависимость решения задачи (1)-(4) от малого параметра далее его обозначаем $u(x,t;\varepsilon)$.

Сформулируем обратную задачу. Пусть число ε задано,а функция $\mu(t)$ неизвестна. Требуется определить $\mu(t)$, если задана дополнительная информация о решении задачи (1)-(4)

$$u(x_0,t;\varepsilon) = g(t;\varepsilon), \quad 0 \le t \le T,$$

где $x_0 \in (0,\pi)$, а $g(t;\varepsilon)$ - известная функция.

$$u(x,t;\varepsilon) = \mu(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \int_0^t \exp\left[-\frac{(2n+1)^2}{4\varepsilon}(t-\tau)\right] \mu'(\tau) d\tau \sin\left(\frac{2n+1}{2} x\right)$$

Разложение $u(x,t;\varepsilon)$ по малому параметру

$$u(x,t;\varepsilon) = \mu(t) + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon^k \mu^{(k)}(t) f_k(x) + \varepsilon^{m+1} v_{m+1}(x,t;\varepsilon),$$

где функции $f_k(x)$ являются решениями краевой задачи

$$f_k''(x) = f_{k-1}(x), 0 \le x \le \pi, \quad f_k(0) = f_k'(\pi) = 0, \quad k = 1, ...m, f_0(x) = 1.$$

Приближенное решение обратной задачи $\tilde{\mu}_m(t;\varepsilon)$ определяется в результате замены точного равенства

$$u(x_0,t;\varepsilon) = \mu(t) + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon^k \mu^{(k)}(t) f_k(x_0) + \varepsilon^{m+1} v_{m+1}(x_0,t;\varepsilon) = g(t;\varepsilon), \quad 0 \le t \le T$$

на следующее

$$\tilde{\mu}_m(t;\varepsilon) + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon^k \tilde{\mu}_m^{(k)}(t;\varepsilon) f_k(x_0) = g(t;\varepsilon), \quad 0 \le t \le T$$

Нулевое приближение $\tilde{\mu}_0(t;\varepsilon) = g(t;\varepsilon)$.

Первое приближение $\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)$ является решением дифференциального уравнения первого порядка с малым параметром при старшей производной

$$\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon) + \varepsilon\tilde{\mu}_1'(t;\varepsilon)f_1(x_0) = g(t;\varepsilon), \quad 0 \le t \le T. \tag{5}$$

Второе приближение $\tilde{\mu}_2(t;\varepsilon)$ является решением дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной

$$\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon) + \varepsilon\tilde{\mu}_1'(t;\varepsilon)f_1(x_0) + \varepsilon^2\tilde{\mu}_2''(t;\varepsilon)f_2(x_0) = g(t;\varepsilon), \quad 0 \le t \le T. \tag{6}$$

Если известно значение $\mu(T)$, то $\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)$ определяется как решение задачи Коши для уравнения (5) с условием $\tilde{\mu}_1(T;\varepsilon) = \mu(T)$.

Если известны значения $\mu(T)$, $\mu'(T)$, то $\tilde{\mu}_2(t;\varepsilon)$ определяется как решение задачи Коши для уравнения (6) с условиями $\tilde{\mu}_2(T;\varepsilon) = \mu(T)$, $\tilde{\mu}_2'(T;\varepsilon) = \mu'(T)$.

Оценки погрешности: $\|\tilde{\mu}_0 - \mu\|_{C[0,T]} \le c_0\varepsilon$,

$$\|\tilde{\mu}_1 - \mu\|_{C[0,T]} \le c_1\varepsilon^2, \quad \|\tilde{\mu}_2 - \mu\|_{C[0,T]} \le c_2\varepsilon^3.$$

Рассмотрим начально-краевую задачу для сингулярно возмущенного интегро-дифференциального уравнения теплопроводности

$$\varepsilon u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + \varepsilon \int\limits_0^t K(t,\tau) u(x,\tau) d\tau, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{7}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{8}$$

$$u_x(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{9}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi, \tag{10}$$

где ε - малый параметр, $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < \pi, 0 < t \le T\}$.

Чтобы подчеркнуть зависимость решения задачи (7)-(10) от малого параметра далее его обозначаем $u(x,t;\varepsilon)$.

Сформулируем обратную задачу. Пусть функция $K(t,\tau)$ и число ε заданы, а функция $\mu(t)$ неизвестна. Требуется определить $\mu(t)$, если задана дополнительная информация о решении задачи (7)-(10)

$$u(x_0,t;\varepsilon) = g(t;\varepsilon), \quad 0 \le t \le T,$$

где $x_0 \in (0,\pi)$, а $g(t;\varepsilon)$ - известная функция.

Если известно значение $\mu(T)$, то приближенное решение обратной задачи $\tilde{\mu}(t;\varepsilon)$ определяется как решение задачи Коши для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной

$$\varepsilon f(x_0)\tilde{\mu}'(t;\varepsilon) + \tilde{\mu}(t;\varepsilon) - \varepsilon f(x_0)\int\limits_0^t K(t,\tau)\tilde{\mu}(\tau;\varepsilon)d\tau = g(t;\varepsilon), \quad 0 \le t \le T,$$

$$\tilde{\mu}(T;\varepsilon) = \mu(T),$$

где $f(x) = x^2/2 - \pi x$.

При выполнении ряда условий справедлива оценка погрешности

$$\max_{[0,T]} |\mu(t) - \tilde{\mu}(t;\varepsilon)| \le c\varepsilon^2,$$

Рассмотрим начально-краевую задачу для функций $u(x,t)$, $a(x,t)$:

$$\nu u_x(x,t)+\varepsilon u_t(x,t)+\varepsilon a_t(x,t) = Du_{xx}(x,t)+f(x)p(t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{11}$$

$$a_t(x,t) = \gamma(u(x,t) - a(x,t)), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{12}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{13}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l, \tag{14}$$

$$a(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l, \tag{15}$$

где $Q_T = \{(x,t) : 0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$, ν, ε, D, γ - положительные постоянные, ε - малый параметр.

Сформулируем обратную задачу. Пусть функция $f(x)$ и постоянные ν, ε, D, γ заданы, а функция $p(t)$ неизвестна. Требуется определить $p(t)$, если задана дополнительная информация о решении задачи (11)-(15)

$$u(x_0,t;\varepsilon) = g(t;\varepsilon), \quad 0 \le t \le T,$$

где x_0 - заданное число, $x_0 \in (0,l)$, а $g(t;\varepsilon)$ - известная функция.

Нулевое приближение

Рассмотрим функцию $F_0(x)$, являющуюся решением краевой задачи:

$$DF_0''(x) - \nu F_0'(x) = -f(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{16}$$

$$F_0(0) = F_0(l) = 0. \tag{17}$$

Предположим, что $F_0(x_0) \neq 0$. Определим функцию

$$p_0(t, \varepsilon) = g(t; \varepsilon)(F_0(x_0))^{-1}.$$

Теорема 1. Предположим, что выполнены следующие условия:
$f \in C^2[0, l]$, $f(0) = f(l) = 0$, $F_0(x_0) \neq 0$; $g \in C^1[0, T]$,
$g(0; \varepsilon) = 0$, $p(0) = 0$.
Тогда

$$\max_{[0,T]} |p(t) - p_0(t; \varepsilon)| \le c\varepsilon,$$

Первое приближение $p_1(t;\varepsilon)$.

Рассмотрим функцию $F_1(x)$, являющуюся решением краевой задачи:

$$DF_1''(x) - \nu F_1'(x) = F_0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{18}$$

$$F_1(0) = F_1(l) = 0. \tag{19}$$

где $F_0(x)$ - решение краевой задачи (16),(17).

Предположим, что $F_1(x_0)F_0(x_0) > 0$.

Определим функцию $p_1(t;\varepsilon)$ как решение задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной

$$\varepsilon F_1(x_0)p_1'(t;\varepsilon) + F_0(x_0)p_1(t;\varepsilon) + \varepsilon\gamma F_1(x_0)p_1(t;\varepsilon) -$$

$$-\varepsilon\gamma^2 F_1(x_0)\int\limits_0^t \exp(-\gamma(t-\tau))p_1(\tau;\varepsilon)d\tau = g(t;\varepsilon), \quad 0 \le t \le T, \tag{20}$$

$$p_1(0;\varepsilon) = 0. \tag{21}$$

Теорема 2. Предположим, что выполнены следующие условия:

$$f \in C^2[0,l], \quad f(0) = f(l) = 0, \quad F_0(x_0)F_1(x_0) > 0;$$

$$g \in C^1[0,T] \quad g(0;\varepsilon) = 0 \quad p \in C^2[0,T] \quad p(0) = p'(0) = 0,$$

то

$$\max_{[0,T]} |p(t) - p_1(t;\varepsilon)| \le c\varepsilon^2,$$

Если $F_1(x_0)F_0(x_0) < 0$ и известно значение $p(T)$, то первое приближение можно определить как решение задачи Коши

$$\varepsilon F_1(x_0)p_1'(t;\varepsilon) + F_0(x_0)p_1(t;\varepsilon) + \varepsilon\gamma F_1(x_0)p_1(t;\varepsilon) -$$

$$-\varepsilon\gamma^2 F_1(x_0)\int\limits_0^t \exp(-\gamma(t-\tau))p_1(\tau;\varepsilon)d\tau = g(t;\varepsilon), \quad 0 \le t \le T,$$

$$p_1(T;\varepsilon) = p(T).$$

Некоторые публикации

1. *Денисов А.М.* Приближенное решение обратных задач для уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. Т. 61. № 12. С. 2040-2049.

2. *Денисов А.М.* Приближенное решение обратной задачи для интегродифференциального уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. Т. 63. № 5. С. 702-709.

3. *Денисов А.М.* Аппроксимация решения обратной задачи для сингулярно возмущенной системы уравнений в частных производных // Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59, № 6, с. 746-751.